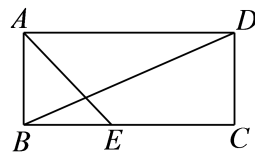


第2讲 矩形与菱形（练习）

一、矩形的性质

1. 如图， BD 为矩形 $ABCD$ 的对角线，点 E 在 BC 上，连接 AE ， $AE = 5\sqrt{2}$ ， $EC = 7$ ， $\angle C = 2\angle DAE$ ，则
 $BD =$ _____ .



【答案】 13

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 90^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle C = 2\angle DAE,$$

$$\therefore \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = BE,$$

$$\therefore AE = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore AB = BE = 5,$$

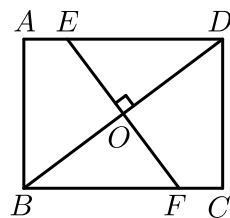
$$\therefore EC = 7,$$

$$\therefore AD = BC = 12,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13.$$

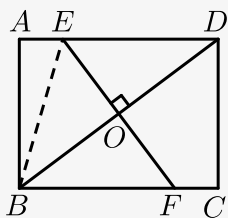
【标注】 【知识点】 矩形的性质

2. 如图所示，已知长方形 $ABCD$ ， $AB = 3\text{cm}$ ， $AD = 4\text{cm}$ ，过对角线 BD 的中点 O 作 BD 垂直平分线 EF ，分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F ，则 AE 的长为 _____ .



【答案】 $\frac{7}{8}\text{cm}$

【解析】如图，连接 EB ，



$\therefore EF$ 垂直平分 BD ，

$\therefore ED = EB$ ，

设 $AE = x\text{cm}$ ，则 $DE = EB = (4 - x)\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中， $AE^2 + AB^2 = BE^2$ ，

即： $x^2 + 3^2 = (4 - x)^2$ ，

解得： $x = \frac{7}{8}$ ，

$\therefore AE$ 的长为 $\frac{7}{8}\text{cm}$ 。

【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

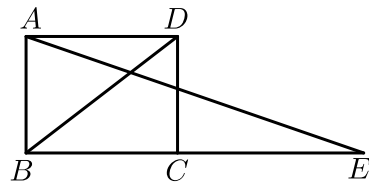
【知识点】勾股定理

【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【知识点】矩形的性质

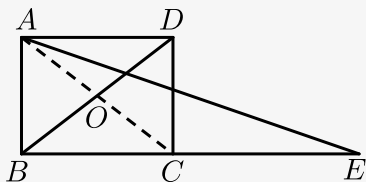
【思想】转化与化归思想

3. 如图，延长矩形 $ABCD$ 的边 BC 至点 E ，使 $CE = BD$ ，连接 AE ，如果 $\angle ADB = 38^\circ$ ，则 $\angle E$ 的值是 _____。



【答案】 19°

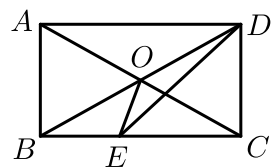
【解析】连接 AC 交 BD 于点 O ，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形 ,
 $\therefore AD \parallel BC$, $AC = BD$,
 $\therefore \angle OCD = \angle ODC = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$, $CE = AC = BD$,
 $\therefore \angle E = \frac{180^\circ - (52^\circ + 90^\circ)}{2} = 19^\circ$.

【标注】【知识点】矩形的性质

4. 如图，矩形 $ABCD$ 中， AC 、 BD 交于点 O ， $\angle AOB = 60^\circ$ ， DE 平分 $\angle ADC$ 交 BC 于点 E ，连接 OE ，则 $\angle COE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 75°

【解析】 $\because \angle AOB = 60^\circ$,
 $\therefore \angle DOC = \angle AOB = 60^\circ$,
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,
 $\therefore \angle DCB = 90^\circ$, $AC = BD$, $AC = 2CO$, $BD = 2OD$,
 $\therefore OC = OD$,
 $\therefore \triangle COD$ 是等边三角形 ,
 $\therefore DC = OC$, $\angle ACD = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADE = \angle DEC$,
 $\because DE$ 平分 $\angle ADC$,
 $\therefore \angle ADE = \angle CDE$,
 $\therefore \angle CDE = \angle DEC$,
 $\therefore DC = CE$,
 $\therefore CE = OC$,

$\because \angle OCE = 30^\circ$,
 $\therefore \angle COE = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$;
 故答案为 : 75° .

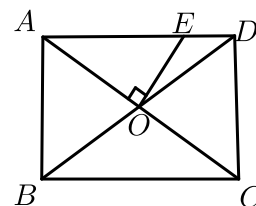
【标注】【知识点】角的和差的计算与证明

【知识点】矩形的性质

【知识点】等边三角形的判定

【能力】推理论证能力

5. 如图 , 在矩形 $ABCD$ 中 , $AB = 3$, $BC = 5$, $OE \perp AC$ 交 AD 于 E , 则 AE 的长为 () .



A. 4

B. 3.4

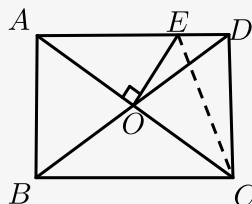
C. 2.5

D. 2

【答案】B

【解析】如图 ,

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中 , $AB = 3$, $BC = 5$,
 $\therefore AD = BC = 5$, $CD = AB = 3$,
 $OA = OC$,
 $\because OE \perp AC$,
 $\therefore OE$ 垂直平分 AC ,
 $\therefore AE = CE$,
 设 $AE = CE = x$, 则 $DE = 5 - x$,
 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中 , $CD^2 + DE^2 = CE^2$,
 即 $3^2 + (5 - x)^2 = x^2$,
 解得 $x = 3.4$,
 即 AE 的长为 3.4 .
 故选 : B .



【标注】【思想】数形结合思想

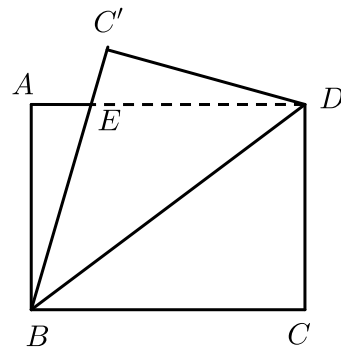
【能力】运算能力

【知识点】矩形的性质

【知识点】勾股定理

【知识点】勾股定理的综合应用

6. 如图，将长方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 所在直线折叠，点 C 落在同一平面内，落点记为 C' ， BC' 与 AD 交于点 E ，若 $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，则 DE 的长为 _____ 。



【答案】 $\frac{25}{8}$

【解析】由折叠得， $\angle CBD = \angle EBD$ ，

由 $AD \parallel BC$ 得， $\angle CBD = \angle EDB$ ，

$\therefore \angle EBD = \angle EDB$ ，

$\therefore DE = BE$ ，

设 $DE = BE = x$ ，则 $AE = 4 - x$ ，

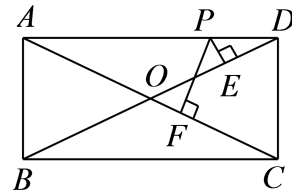
在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $AE^2 + AB^2 = BE^2$ ， $(4 - x)^2 + 3^2 = x^2$ ，

解得 $x = \frac{25}{8}$ ，

$\therefore DE$ 的长为 $\frac{25}{8}$ 。

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

7. 在矩形 $ABCD$ 中，已知两邻边 $AD = 12$ ， $AB = 5$ ， P 是 AD 边上异于 A 和 D 的任意一点，且 $PE \perp BD$ ， $PF \perp AC$ ， E 、 F 分别是垂足，那么 $PE + PF =$ _____ 。



【答案】 $\frac{60}{13}$

【解析】如图，过A作 $AG \perp BD$ 于G，

$$\text{则 } S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \times OD \times AG,$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOP} + S_{\triangle POD} &= \frac{1}{2} \times AO \times PF + \frac{1}{2} \times DO \times PE, \\ &= \frac{1}{2} \times DO \times (PE + PF), \end{aligned}$$

$$\because S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle POD},$$

$$\therefore PE + PF = AG,$$

$$\because AD = 12, AB = 5,$$

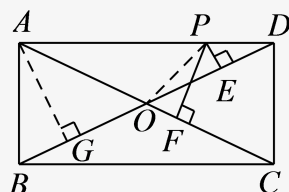
$\therefore$

$$BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

,

$$\therefore AG = \frac{12 \times 5}{13} = \frac{60}{13},$$

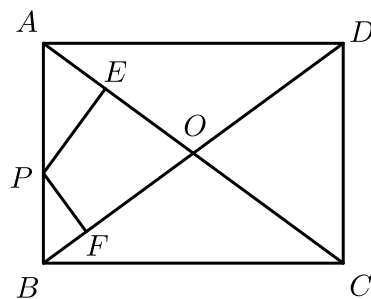
$$\therefore PE + PF = \frac{60}{13}.$$



【标注】【知识点】矩形的性质

【知识点】与三边关系有关的证明

8. 如图，在矩形ABCD中， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ，点P在AB上， $PE \perp AC$ 于E， $PF \perp BD$ 于F，则 $PE + PF$ 等于（ ）。



A. $\frac{7}{5}$

B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{13}{5}$

D. $\frac{14}{5}$

【答案】B

【解析】方法一：连接OP，作 $AM \perp OB$ 于M。

$\because$ 四边形ABCD是矩形， $\therefore OA = OB$ 。

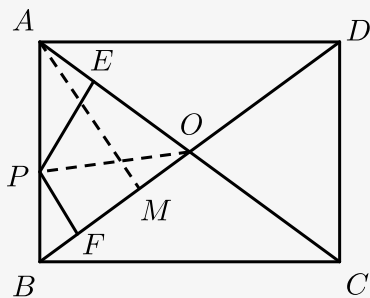
$$\because S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OB \cdot AM,$$

$$\begin{aligned} \text{且 } S_{\triangle OAB} &= S_{\triangle OAP} + S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2} OA \cdot PE + \frac{1}{2} OB \cdot PF \\ &= \frac{1}{2} OB \cdot (PE + PF), \end{aligned}$$

$$\therefore PE + PF = AM,$$

$$\because AB = 3, AD = 4, \therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}BD \cdot AM, \therefore AM = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{12}{5}.$$



方法二：设 $AP = x$ ， $PB = 3 - x$ ，

$\because \angle EAP = \angle EAP$ ， $\angle AEP = \angle ABC$ ，

$\therefore \triangle AEP \sim \triangle ABC$ ，

$$\text{故 } \frac{x}{5} = \frac{PE}{4} \text{ ①，}$$

同理可得 $\triangle BFP \sim \triangle DAB$ ，

$$\text{故 } \frac{3-x}{5} = \frac{PF}{4} \text{ ②，}$$

$$\text{①+②得 } \frac{3}{5} = \frac{PE + PF}{4}，$$

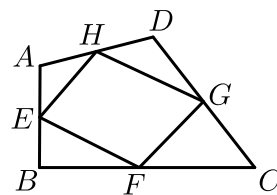
$$\therefore PE + PF = \frac{12}{5}.$$

故选B.

【标注】【知识点】相似反A字型

二、矩形的判定

9. 如图， E, F, G, H 分别是四边形 $ABCD$ 四条边的中点，要使四边形 $EFGH$ 为矩形，则四边形 $ABCD$ 应具备的条件是（ ）.



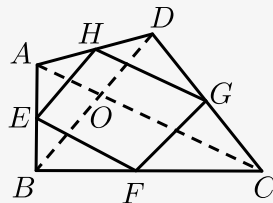
- | | |
|--------------------|------------|
| A. 一组对边平行而另一组对边不平行 | B. 对角线相等 |
| C. 对角线互相垂直 | D. 对角线互相平分 |

【答案】C

【解析】要是四边形 $EFGH$ 是矩形，应添加条件是对角线互相垂直.

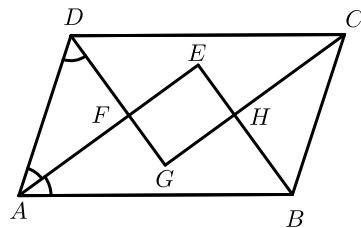
连接 AC, BD ，两线交于 O ，

根据三角形的中位线定理得： $EF \parallel AC$ ，
 $EF = \frac{1}{2}AC$ ， $GH \parallel AC$ ， $GH = \frac{1}{2}AC$ ，
 $\therefore EF \parallel GH$ ， $EF = GH$ ，
 $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 一定是平行四边形，
 $\therefore EF \parallel AC$ ， $EH \parallel BD$ ，
 $\because BD \perp AC$ ，
 $\therefore EH \perp EF$ ，
 $\therefore$ 此时四边形 $EFGH$ 是矩形， $\angle HEF = 90^\circ$ 。
 故选 C。



【标注】【知识点】中点四边形

10. 如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中， AE 、 BE 、 CG 、 DG 分别是各内角的平分线， E 、 F 、 G 、 H 为它们的交点。求证：四边形 $EFGH$ 是矩形。



【答案】 证明见解析。

【解析】 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ADC = 180^\circ.$$

$$\because DG \text{ 平分 } \angle ADC,$$

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle ADC.$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle 2 = \frac{1}{2} \angle DAB.$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2} (\angle ADC + \angle DAB) = 90^\circ.$$

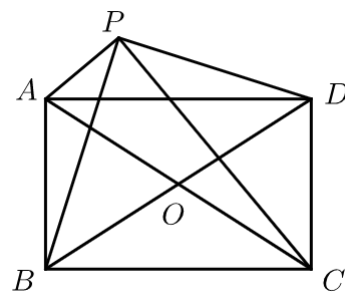
$$\therefore \angle AFD = 90^\circ.$$

$$\text{同理, } \angle EHG = \angle BHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 是矩形}.$$

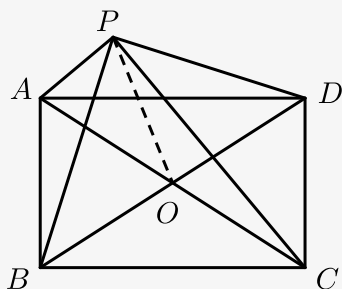
【标注】【知识点】矩形的判定-从四边形

11. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， AC ， BD 交于点 O ， P 是平行四边形 $ABCD$ 外一点，且 $\angle APC = \angle BPD = 90^\circ$ ，求证：平行四边形 $ABCD$ 是矩形．



【答案】证明见解析．

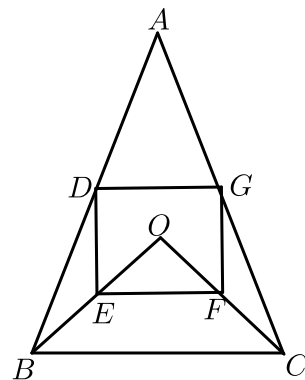
【解析】连接 PO ，



$\because O$ 是 AC 、 BD 的中点，
 $\therefore AO = CO$ ， $BO = DO$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中，
 $\because O$ 为 BD 中点，
 $\therefore PO = \frac{1}{2}BD$ ，
 在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中，
 $\because O$ 为 AC 中点，
 $\therefore PO = \frac{1}{2}AC$ ，
 $\therefore AC = BD$ ，
 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形．

【标注】【知识点】矩形的判定-从平行四边形

12. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部， $\angle BOC = 90^\circ$ ， $OB = OC$ ， D 、 E 、 F 、 G 分别是 AB 、 OB 、 OC 、 AC 的中点．

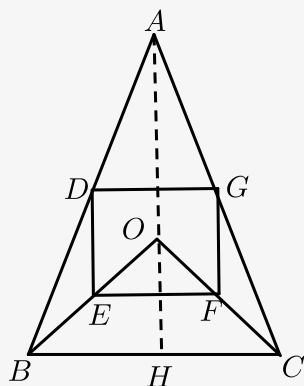


- (1) 求证：四边形 $DEFG$ 是矩形 .
- (2) 若 $DE = 2$, $EF = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $S_{\triangle ABC} = 21$.

【解析】 (1) 连接 AO 并延长交 BC 于 H ,

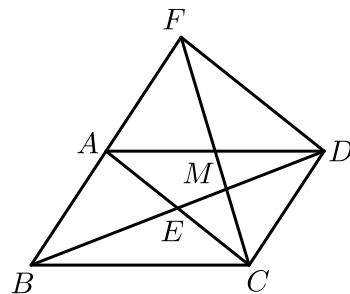


$\because AB = AC$, $OB = OC$,
 $\therefore AH$ 是 BC 的中垂线 , 即 $AH \perp BC$ 于 H ,
 $\because D$ 、 E 、 F 、 G 分别是 AB 、 OB 、 OC 、 AC 的中点 ,
 $\therefore DG \parallel EF \parallel BC$, $DE \parallel AH \parallel GF$,
 $\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形 ,
 $\because EF \parallel BC$, $AH \perp BC$,
 $\therefore AH \perp EF$, $DE \parallel AH$,
 $\therefore EF \perp DE$,
 $\therefore$ 平行四边形 $DEFG$ 是矩形 .

(2) $\because \triangle BOC$ 是等腰直角三角形 ,
 $\therefore BC = 2EF = 2OH = 2 \times 3 = 6$,
 $AH = OA + OH = 2DE + EF = 2 \times 2 + 3 = 7$,
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 7 = 21$.

【标注】【知识点】矩形的判定-从四边形

13. 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 E ，点 M 为 AD 的中点，连接 CM ， CM 的延长线交 BA 的延长线于点 F ，连接 FD 。



- (1) 求证： $AB = AF$ 。
(2) 若 $AM = AB$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ，判断四边形 $ACDF$ 的形状，并证明你的结论。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 四边形 $AFDC$ 是矩形。

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle ADC,$$

$\because$ 点 M 为 AD 的中点，

$$\therefore AM = DM, \text{ 且 } \angle FAD = \angle ADC, \angle AMF = \angle CMD,$$

$$\therefore \triangle AMF \cong \triangle CMD (\text{ASA}),$$

$$\therefore AF = CD,$$

$$\therefore AB = AF.$$

(2) $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle BCD + \angle ADC = 180^\circ, \text{ 且 } \angle BCD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore AF = CD, AF \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $AFDC$ 是平行四边形。

$$\therefore AM = MD, FM = CM,$$

$$\therefore AB = AM,$$

$$\therefore MD = CD, \text{ 且 } \angle ADC = 60^\circ.$$

$\therefore \triangle DMC$ 是等边三角形。

$$\therefore MC = CD = MD,$$

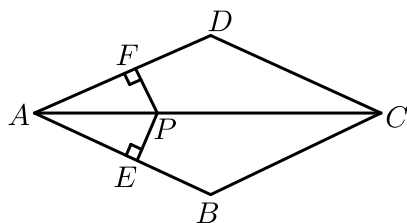
$$\therefore AD = CF,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AFDC$ 是矩形.

【标注】【知识点】平行四边形与全等综合

三、菱形的性质

14. 如图, 点 P 是菱形 $ABCD$ 内一点, $PE \perp AB$, $PF \perp AD$, 垂足分别是 E 和 F , 若 $PE = PF$, 下列说法不正确的是 ().



- A. 点 P 一定在菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 上
 B. 可用 HL 证明 $\text{Rt}\triangle AEP \cong \text{Rt}\triangle AFP$
 C. AP 平分 $\angle BAD$
 D. 点 P 一定是菱形 $ABCD$ 的两条对角线的交点

【答案】D

【解析】 $\because PE \perp AB$, $PF \perp AD$, $PE = PF$,

$\therefore AP$ 平分 $\angle BAD$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore$ 对角线 AC 平分 $\angle BAD$, 故 A、C 选项结论正确;

可以利用“HL”证明 $\text{Rt}\triangle AEP \cong \text{Rt}\triangle AFP$, 故 B 选项正确;

点 P 在 AC 上, 但不一定在 BD 上,

所以, 点 P 一定是菱形 $ABCD$ 的两条对角线的交点不一定正确.

故选 D.

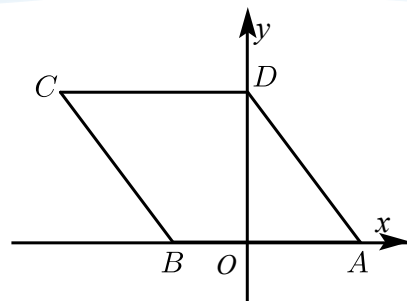
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】HL

【知识点】菱形的性质

【思想】数形结合思想

15. 如图, 若菱形 $ABCD$ 的顶点 A , B 的坐标分别为 $(6, 0)$, $(-4, 0)$, 点 D 在 y 轴上, 则点 C 的坐标是 ____.



【答案】 $(-10, 8)$

【解析】 $\because A, B$ 坐标分别为 $(6, 0), (-4, 0)$.

$$\therefore AB = 6 - (-4) = 10 .$$

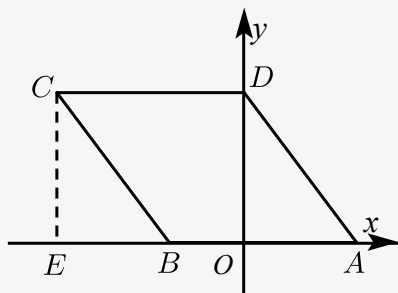
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形 ,

$$\therefore AB = AD = 10 ,$$

又 $\because OA = 6$.

$$\text{在 Rt}\triangle OAD \text{ 中 } OD = \sqrt{AD^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 .$$

如图作 $CE \perp AB$ 交 AB 延长线于点 E .



则易证 $\triangle BCE \cong \triangle ADO$,

$$\therefore BE = OA = 6 ,$$

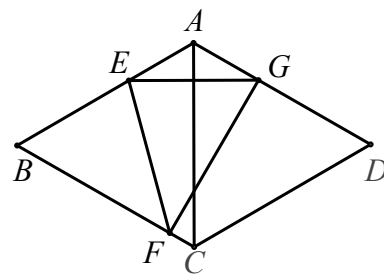
$$\therefore OE = BE + OB = 6 + 4 = 10 .$$

故 C 点坐标为 $(-10, 8)$.

【标注】 【方法】 图象法

【知识点】 菱形的性质

16. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 AB, BC 上, 将菱形沿 EF 折叠, 点 B 恰好落在 AD 边的点 G 处, 且 $EG \perp AC$, 若 $CD = 8$, 则 FG 的长为 () .



A. 6

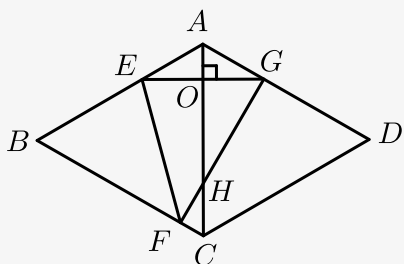
B. $4\sqrt{3}$

C. 8

D. $6\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 如图，设 AC 与 EG 交于点 O ， FG 交 AC 于 H ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle BAD = 120^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ ， $\triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle CAD = \angle B = 60^\circ$ ，

$\because EG \perp AC$ ，

$\therefore \angle GOH = 90^\circ$ ，

$\because \angle EGF = \angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle OHG = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle AGH = 90^\circ$ ，

$\therefore FG \perp AD$ ，

$\therefore FG$ 是菱形的高，即等边三角形 $\triangle ABC$ 的高： $FG = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$ 。

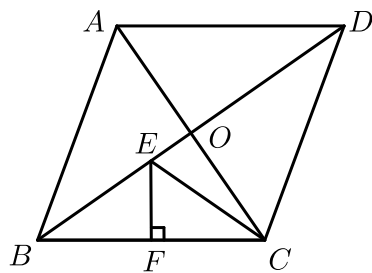
故选 B。

【标注】 【知识点】菱形的性质

【能力】推理论证能力

【思想】数形结合思想

17. 在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ，点 F 为 BC 中点，过点 F 作 $FE \perp BC$ 于点 F 交 BD 于点 E ，连接 CE ，若 $\angle BDC = 34^\circ$ ，则 $\angle ECA = \underline{\quad\quad}^\circ$ 。



【答案】 22

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD, \angle BDC = \angle DBC = 34^\circ,$$

$$\angle BCA = \angle DCO = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ,$$

$\because EF$ 垂直平分 BC ，

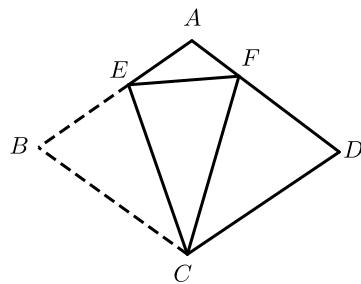
$$\therefore \angle ECF = \angle DBC = 34^\circ,$$

$$\therefore \angle ECA = 56^\circ - 34^\circ = 22^\circ.$$

故答案为：22.

【标注】【知识点】菱形的性质

18. 如图，将菱形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 B 落在 AD 边的点 F 处，折痕为 CE ，若 $\angle D = 70^\circ$ ，则 $\angle ECF$ 的度数是 _____.



【答案】 35°

【解析】 $\triangle BCE$ 沿 CE 折叠得到 $\triangle FCE$ ，

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle FCE,$$

$$\therefore BC = FC, \angle BCE = \angle FCE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore BC = CD, \angle D + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore FC = CD,$$

$$\therefore \angle D = \angle CFD = 70^\circ,$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle FCD &= 40^\circ, \angle BCD = 110^\circ, \\ \therefore \angle BCF &= \angle BCD - \angle FCD = 70^\circ, \\ \therefore \angle ECF &= 35^\circ.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】菱形的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

19. 从菱形的一个钝角顶点向它的两条对边作垂线，这两条垂线分别垂直平分对边，则该菱形的钝角等于（ ）。

- A. 135° B. 150° C. 110° D. 120°

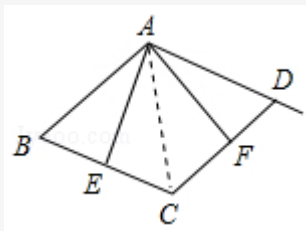
【答案】D

【解析】在菱形 $ABCD$ 中，已知 AE ， AF 分别垂直平分 BC ， CD 。连接 AC 。

故 $AB = AC = AD$ ， $BE = EC = CF = FD$ 。

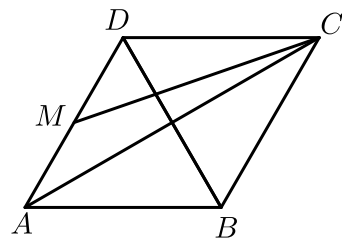
$\therefore \triangle ABC$ ， $\triangle ADC$ 是等边三角形。

故 $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 120^\circ$ 。



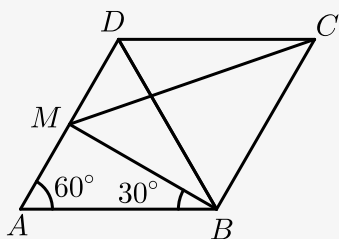
【标注】【知识点】菱形的性质

20. 如图，在边长为2的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是边 AD 的中点，则 CM 的长= _____。



【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】



$\therefore$ 菱形 $ABCD$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是 AD 中点，

$\therefore \triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 为等边三角形，

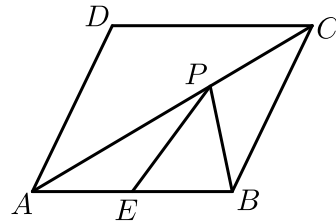
$$BM \perp AD,$$

$$\therefore \angle MBA = 30^\circ, \therefore MB \perp BC,$$

$$\because \text{边长为} 2, \therefore MB = \sqrt{3}, BC = 2, \therefore MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{7}.$$

【标注】【知识点】菱形的性质

21. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ，点 E 是边 AB 的中点， P 是对角线 AC 上的一个动点，若 $AB = 2$ ，则 $PB + PE$ 的最小值是（ ）。



A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $2\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】连接 DE 交 AC 于点 P' 、连接 DB ，由菱形的对角线互相垂直平分，

$\therefore$ 可得 B 、 D 关于 AC 对称，则 $P'B = P'D$ ，

$\therefore P'B + P'E = P'D + P'E = DE$ ，

$\therefore$ 当 P 点在对角线 AC 的 P' 位置时， $PB + PE$ 有最小值。

$\because$ 点 E 是边 AB 的中点， $\angle ABC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle DBA = \angle BDA = 60^\circ$ ，

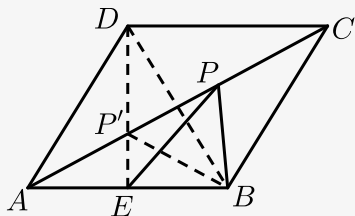
$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABD$ 的垂直平分线， $DE \perp AB$ ，

$\because AB = 2$ ，

$\therefore AE = 1$ ， $AD = 2$ ，

$\therefore DE = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$ 。



【标注】【知识点】菱形的性质

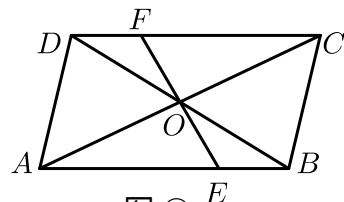
【知识点】轴对称的性质

【知识点】勾股定理与实际问题

四、菱形的判定

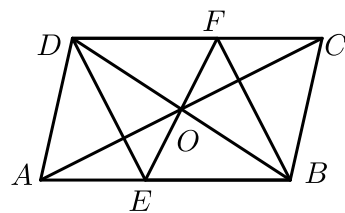
22. 在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， EF 过点 O 且与 AB ， CD 分别相交于点 E ， F 。

(1) 如图①，求证： $OE = OF$ 。



图①

(2) 如图②，若 $EF \perp DB$ ，求证：四边形 $BEDF$ 是菱形。



图②

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, OB = OD,$$

$$\therefore \angle FDO = \angle EBO,$$

在 $\triangle DFO$ 和 $\triangle BEO$ 中，

$$\begin{cases} \angle FDO = \angle EBO \\ OD = OB \\ \angle DOF = \angle BOE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DFO \cong \triangle BEO (\text{ASA}).$$

$$\therefore OE = OF.$$

(2) 由(1)得 $\triangle DFO \cong \triangle BEO$ ，

$$\therefore DF = BE, OD = OB, OF = OE,$$

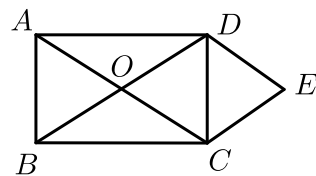
$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \text{四边形} DEBF \text{为平行四边形},$$

$$\text{又} \because EF \perp BD,$$

$$\therefore \text{平行四边形} DEBF \text{为菱形}.$$

23. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ， $DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ 。



(1) 求证：四边形 $OCED$ 是菱形。

(2) 若 $\angle ACB = 30^\circ$ ，菱形 $OCED$ 的面积为 $8\sqrt{3}$ ，求 AC 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 8。

【解析】(1) 方法一： $\because DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 为平行四边形。

在矩形 $ABCD$ 中， $OC = OD$ ，

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是菱形。

方法二： $\because DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OC = OD$ （矩形对角线相等且互相平分），

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是菱形（邻边相等的平行四边形是菱形）。

(2) 方法一： $\because S_{\text{菱形}OCED} = 8\sqrt{3}$ ，

$$\therefore S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} S_{\text{菱形}OCED} = 4\sqrt{3}，$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = 2S_{\triangle OCD} = 8\sqrt{3}。$$

在矩形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB = 30^\circ。$$

设 $CD = x$ ，则 $AC = 2x$ ，

$$\text{在Rt}\triangle ACD\text{中，} AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{3}x，$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 = 8\sqrt{3}，$$

解得 $x = 4$ ，

$$\therefore AC = 2x = 8，$$

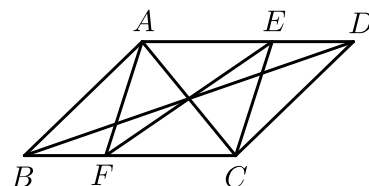
$\therefore AC$ 的长为8。

方法二： $\angle OCD = 90^\circ - \angle ACB = 60^\circ$ ，

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OCD \text{ 是等边三角形,} \\ S_{\triangle OCD} &= \frac{1}{2} S_{\text{菱形} OCED} = 4\sqrt{3}, \\ \therefore OC &= 4, \\ \therefore AC &= 2OC = 8. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

24. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E, F 分别是 AD, BC 上的点，且 $DE = BF$ ， $AC \perp EF$ 。
求证：四边形 $AECF$ 是菱形。



【答案】证明见解析。

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

$$\because DE = BF,$$

$$\therefore AE = CF,$$

$$\because AE \parallel CF,$$

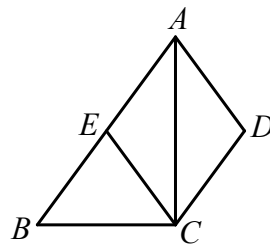
$$\therefore \text{四边形} AECF \text{ 是平行四边形},$$

$$\because AC \perp EF,$$

$$\therefore \text{四边形} AECF \text{ 是菱形}.$$

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

25. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC 平分 $\angle BAD$ ，点 E 在 AB 边上，且 $CE \parallel AD$ 。



(1) 求证：四边形 $AECD$ 是菱形。

(2) 如果点 E 是 AB 的中点， $AC = 8$ ， $EC = 5$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积。

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 四边形 $ABCD$ 的面积为 36 .

【解析】 (1) $\because AB \parallel CD, CE \parallel AD,$

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形 ,

$\because AC$ 平分 $\angle BAD,$

$\therefore \angle EAC = \angle DAC,$

$\because AB \parallel CD,$

$\therefore \angle EAC = \angle ACD,$

$\therefore \angle DAC = \angle ACD,$

$\therefore AD = CD,$

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是菱形 .

(2) $\because$ 四边形 $AECD$ 是菱形 ,

$\therefore AE = CE,$

$\therefore \angle EAC = \angle ACE,$

$\because$ 点 E 是 AB 的中点 ,

$\therefore AE = BE,$

$\therefore \angle B = \angle ECB,$

$\therefore \angle ACE + \angle ECB = 90^\circ$, 即 $\angle ACB = 90^\circ$,

$\because$ 点 E 是 AB 的中点 , $EC = 5,$

$\therefore AB = 2EC = 10,$

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24,$

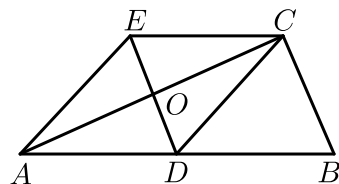
$\because$ 点 E 是 AB 的中点 , 四边形 $AECD$ 是菱形 ,

$\therefore S_{\triangle AEC} = S_{\triangle EBC} = S_{\triangle ACD} = 12,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $= S_{\triangle AEC} + S_{\triangle EBC} + S_{\triangle ACD} = 36.$

【标注】 【知识点】菱形的判定-从平行四边形

26. 如图 , $\triangle ABC$ 中 , $\angle BCA = 90^\circ$, CD 是边 AB 上的中线 , 分别过点 C, D 作 BA 和 BC 的平行线 , 两线交于点 E , 且 DE 交 AC 于点 O , 连接 AE .



- (1) 求证：四边形 $ADCE$ 是菱形 .
- (2) 若 $\angle B = 60^\circ$, $BC = 6$, 求四边形 $ADCE$ 的面积 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $18\sqrt{3}$.

【解析】 (1) $\because DE \parallel BC$, $EC \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $DBCE$ 是平行四边形 ,

$\therefore EC \parallel DB$, 且 $EC = DB$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , CD 为 AB 边上的中线 ,

$\therefore AD = DB = CD$,

$\therefore EC = AD$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形 ,

$\because$ 四边形 $DBCE$ 是平行四边形 ,

$\therefore ED \parallel BC$,

$\therefore \angle AOD = \angle ACB$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOD = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $ADCE$ 是菱形 .

(2) $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , CD 为 AB 边上的中线 , $\angle B = 60^\circ$, $BC = 6$,

$\therefore AD = DB = CD = 6$,

$\therefore AB = 12$,

由勾股定理得 $AC = 6\sqrt{3}$,

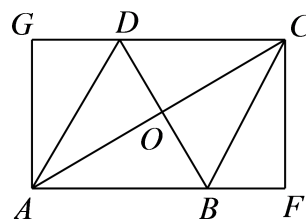
$\because$ 四边形 $DBCE$ 是平行四边形 ,

$\therefore DE = BC = 6$,

$\therefore S_{\text{菱形}ADCE} = \frac{AC \cdot ED}{2} = \frac{6\sqrt{3} \times 6}{2} = 18\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】菱形的周长与面积

27. 如图 , 在矩形 $AFCG$ 中 , BD 垂直平分对角线 AC , 交 CG 于 D , 交 AF 于 B , 交 AC 于 O . 连接 AD , BC



(1) 四边形 $ABCD$ 是菱形吗？请说明理由 .

(2) 若 $\angle GAD = 30^\circ$, $AG = 2\sqrt{3}$, 求菱形 $ABCD$ 对角线 AC , BD 的长 .

【答案】 (1) 四边形 $ABCD$ 为菱形 .

(2) $BD = 4$.

【解析】 (1) 由题知 $BD \perp AC$, $OA = OC$,

$\therefore$ 四边形 $AFCG$ 为矩形 .

$\therefore AF \parallel CG$.

$\therefore \angle OAB = \angle OCD$.

$\triangle AOB$ 和 $\triangle OCD$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} \angle BOA = \angle DOC \\ OA = OC \\ \angle OAB = \angle OCD \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$.

$\therefore AB = CD$.

由 $AB \parallel CD$ 得：四边形 $ABCD$ 为平行四边形 .

由 $AC \perp BD$, 得：平行四边形 $ABCD$ 为菱形 .

(2) $\therefore \angle GAD = 30^\circ$,

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC = \frac{1}{2} \times (90^\circ - \angle GAD) = 30^\circ .$$

$\therefore \text{Rt}\triangle GAD \cong \text{Rt}\triangle OAD$.

$$\therefore AO = AG = 2\sqrt{3} , AC = 2AO = 4\sqrt{3} ,$$

$$OD = GD = AG \cdot \tan 30^\circ = 2 , BD = 2OD = 4 .$$

$$\therefore AC = 4\sqrt{3} .$$

$$BD = 4 .$$

【标注】【知识点】菱形的性质